Umrechnen von Ebenengleichungen

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS

Parameterform in Normalenform

Gegeben:

$E: \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

Gesucht:

$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

Dafür wird benötigt:

- **Stützvektor** $\vec{p}$: Verwende den Stützvektor $\vec{u}$
- **Normalenvektor** $\vec{n}$ kann durch zwei Methoden ermittelt werden:
  - Skalarprodukt: Löse die Gleichungen $\vec{n} \circ \vec{v}$=0 und $\vec{n} \circ \vec{w} = 0$
  - Kreuzprodukt: Berechne $\vec{n}$=$\vec{v} \times \vec{w}$.

Parameterform in Koordinatenform

Gegeben:

$E: \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

Gesucht:

$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$

Dafür wird benötigt:

- **Normalenvektor** $\vec{n}$ kann durch zwei Methoden ermittelt werden:
  - Skalarprodukt: Löse die Gleichungen $\vec{n} \circ \vec{v}$=0 und $\vec{n} \circ \vec{w} = 0$
  - Kreuzprodukt: Berechne $\vec{n}$=$\vec{v} \times \vec{w}$.
- **Parameter** d: Setze die Koordinaten eines Punktes aus der Ebene und den Normalenvektor in die neue Ebenengleichung ein und löse nach d auf.

Beispiel

Gegeben: E: $\vec{x}$= $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

Anhand des Stützvektors kannst du die Koordinaten eines Punktes P in der Ebene ablesen: $P(1 \mid 0 \mid 0)$. Mit dem Kreuzprodukt ergibt sich:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \cdot 2 - 3 \cdot 1\\3 \cdot (-1) - 3 \cdot 2\\3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-9\\5\end{pmatrix}$$

Einsetzen in die allgemeine Normalenform liefert das Ergebnis:

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = \begin{pmatrix}1\\-9\\5\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Einsetzen in die allgemeine Koordinatenform liefert das Ergebnis:

$$d=1 \cdot 1 - 9 \cdot 0 + 5 \cdot 0=1 \quad \Rightarrow E: 1 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 1$$

Normalenform in Parameterform

Gegeben:

$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

Gesucht:

$E: \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

Dafür wird benötigt

- **Stützvektor** $\vec{u}$: Verwende die Koordinaten des Vektors $\vec{p}$, d.h.: $\vec{u}=\vec{p}$
- Für die **Spannvektoren** $\vec{v}$ **und** $\vec{w}$ gibt es zwei Möglichkeiten:
  - Finde Vektoren, sodass die Gleichungen $\vec{n}\circ\vec{v}$=0 und $\vec{n}\circ\vec{w}=0$ gelöst werden.
  - Bestimme die Koordinaten zweier weiterer Punkte (zusätzlich zum Stützpunkt P), die auf der Ebene liegen und verwende dann zwei der Verbindungsvektoren dieser drei Punkte als Spannvektoren

Normalenform in Koordinatenform

Gegeben:

$$E:\vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{p})=0$$

Gesucht:

$$E:n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3=d$$

Dafür wird benötigt:

- **Normalenvektor** $\vec{n}$: Verwende den Normalenvektor $\vec{n}$ der Normalenform.
- **Parameter** d: Setze die Koordinaten des Vektors $\vec{p}$ ein, um d zu berechnen.

Beispiel

Gegeben: E: $\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\right)$=0 Anhand des Vektors $\vec{p}$ kannst du den Stützvektor $\vec{u}$ der Ebene ablesen: $\vec{u}$= $\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ Für die Spannvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erhalten wir folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=n_1\cdot v_1+n_2\cdot v_2+n_3\cdot v_3=-8\cdot v_1+8\cdot v_2+0\cdot v_3=0$$

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=n_1\cdot w_1+n_2\cdot w_2+n_3\cdot w_3=-8\cdot w_1+8\cdot w_2+0\cdot w_3=0$$

Wähle $\vec{v}$ und $\vec{w}$, sodass sie linear unabhängig sind, beispielsweise: $\vec{v}$= $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{w}$= $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ Einsetzen in die allgemeine Parameterform liefert das Ergebnis:

$$E: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor $\vec{n}$ kannst du aus der Normalenform direkt ablesen: $\vec{n}$= $\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$ Den Parameter d erhältst du, indem du $\vec{p}$ und $\vec{n}$ in die allgemeine Koordinatenform einsetzt:

$$n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3=-8\cdot 0+8\cdot 4+0\cdot 4=32=d \quad \Rightarrow E:-8\cdot x_1+8\cdot x_2=32$$

Koordinatenform in Parameterform

Gegeben:

$$E:n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3=d$$

Gesucht:

$$E:\vec{x}=\vec{u}+t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}$$

Dafür wird benötigt:

- **Stützvektor** $\vec{u}$: Bestimme mit Hilfe der Koordinatengleichung die Koordinaten eines Punkts, der in der Ebene liegt.
- **Spannvektoren** $\vec{v}$ **und** $\vec{w}$: Bestimme mit Hilfe der Koordinatengleichung zwei weitere Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen und wähle zwei der Verbindungsvektoren zwischen den drei Punkten als

Spannvektoren.

Beispiel

Gegeben:
E: $\vec{x}$=$1\cdot x_1+3\cdot x_2+2\cdot x_3$=4 Für Stütz- und Spannvektoren benötigen wir insgesamt drei Punkte, die in der Ebene liegen, zum Beispiel:

$A(1\mid 1\mid 0)$
$B(0\mid 0\mid 2)$
$C(-1\mid 1\mid 1)$

Dann können wir die Gleichung in Parameterform folgendermaßen aufstellen:

$$E:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Koordinatenform in Normalenform

Gegeben:

$$E:n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3=d$$

Gesucht:

$$E:\vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{p})=0$$

Dafür wird benötigt:

- **Stützvektor** $\vec{p}$: Bestimme mit Hilfe der Koordinatengleichung die Koordinaten eines Punkts, der in der Ebene liegt.
- **Normalenvektor** $\vec{n}$: Lies die Koordinaten des Normalenvektors $\vec{n}$ an der gegebenen Koordinatengleichung ab.

Beispiel

Gegeben: E: $\vec{x}$=$1\cdot x_1+3\cdot x_2+2\cdot x_3=4$
Für den Punkt P können wir beispielsweise wählen: $P(1\mid 1\mid 0)$
Den Normalenvektor lesen wir aus der Gleichung in Koordinatenform ab:

$E:\vec{x}$=$1\cdot x_1+3\cdot x_2+2\cdot x_3$=4 also $\vec{n}$=$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

Dann können wir die Gleichung in Normalenform folgendermaßen aufstellen:

$$E:\vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{p})=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=0$$